数学分析（I）短课程 [Part 1]

集合论（第一部分：基础/衔接课程续）

孙 伟

华东师范大学数学系算子代数中心

Week 2 to 18. Fall 2014

复习

练习： 我们在前面已知如下定理:
"若集合 A 和 B 中有一个为有限集，则 $A \cap B$ 为有限集。"
基于此定理，证明有限集的子集仍然是有限集。

证明： 设集合 A 是有限集且 D 为 A 的子集。由于 $D \subset A$，故

$$D = A \cap D \quad (\text{为什么？})\quad 。$$

注意到 A 为有限集，由上述定理，我们知道 $A \cap D$ 也是有限集，从而 D 为有限集。□

复习

练习： 对于映射 $f\colon X \to Y$ 和 $A, B \subset X$，证明

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\ 。$$

练习： 构造集合 X，Y 以及映射 $f\colon X \to Y$，使得存在 X 的子集 A 和 B，满足

$$f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)。$$

集合的乘积（product）

定义： 给定集合 A 和 B，定义其乘积 $A\times B$ 为 $\{(a,b): a\in A, b\in B\}$。对于 A 和自身的乘积 $A\times A$，我们也可以记为 A^2。

练习： 证明 $A\times B$ 和 $B\times A$ 之间存在一一映射。

注： 集合 $A\times B$ 和 $B\times A$ 并不是“一样” (not the same) 的，虽然它们间存在一一映射。正如你和你在镜子中的像一样，存在一一对应，但是是不一样的。

练习： 证明 $(A\times B)\times C$ 和 $A\times(B\times C)$ 之间存在一一映射。

恒等（identity）映射和逆（Inverse）映射

定义： 给定集合A，定义其上的恒等映射（记为id_A）为

$$\mathrm{id}_A : A \to A \ , \ a \mapsto a \ 。$$

定义： 给定一一映射 $f: A \to B$，定义其逆映射（记为 f^{-1}）为

$$f^{-1}: B \to A \ , \ b \mapsto \text{“满足 } f(x) = b \text{ 的唯一 } x\text{”} \ 。$$

注： 为什么上述定义是良性定义的（well-defined）？

映射的复合（composition）

定义： 给定映射$f: A \to B$和$g: B \to C$，定义其**复合**（记为 $g \circ f$ ）为

$$g \circ f : A \to C,\ a \mapsto g(f(a))\ 。$$

练习： 如果 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 都是单射，证明 $g \circ f$ 也是单射。

练习： 如果 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 都是满射，证明 $g \circ f$ 也是满射。

恒等（identity）映射和逆（inverse）映射

练习： 对于一一映射 $f\colon A \to B$，证明其逆映射 f^{-1} 也是一一的。

练习： 对于一一映射 $f\colon A \to B$ 和其逆映射 $g\colon B \to A$，证明 $g \circ f = \mathrm{id}_A$ 且 $f \circ g = \mathrm{id}_B$。

练习： 对于映射 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon B \to A$，如果 $g \circ f = \mathrm{id}_A$，证明 f 为单射。如果 $f \circ g = \mathrm{id}_B$，证明 f 为满射。

幂集（Power set）

定义： 给定集合A，定义其**幂集**（记为 $\mathcal{P}(A)$）为

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}。$$

例： $A = \{a, b\}$，$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$。

问题： 如果 $A = \varnothing$，$\mathcal{P}(A)$ 是什么?

练习： 设 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$，则 $\mathcal{P}(A)$ 中包含多少个元素? A 是 $\mathcal{P}(A)$ 中的元素吗?

幂集（Power set）

定理 [Cantor基数定理]: 对任意集合 A，我们有

$$|A| < |\mathcal{P}(A)| \text{。}$$

问题: 可否定义某集合为“所有集合构成的集合”?

不可以! 假定 A 为“所有集合构成的集合“，则对任意的集合 B，由于 $\mathcal{P}(B)$ 是由 B 中子集构成的集合，我们有 $|\mathcal{P}(B)| \leq |A|$。根据上述的定理，有 $|B| < |\mathcal{P}(B)|$。故而可得对于任意的集合 B，我们有 $|B| < |A|$（为什么?）。换言之，A 的基数大于任

幂集（Power set）

何集合的基数。而这是不可能的（因为 A 的基数不可能大于 A 的基数）。

> 问题：可否存在集合 A，使得对于任何集合 B，总有 $|B| \leq |A|$？　[Cantor最大基数悖论]

这个问题是关于“最大基数”的存在性的。答案是不存在这样的集合 A。如果存在的话，令 $B = \mathcal{P}(A)$，就可以得到矛盾了。

> 问题：如何证明上述的Cantor基数定理？

幂集（Power set）

我们这里给出一种比较初等的证明如下：

证明： 对于任何给定集合 A，为了证明 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$，我们需证明 $|A| \le |\mathcal{P}(A)|$ 且 $|A| \ne |\mathcal{P}(A)|$。

为了证明$|A| \le |\mathcal{P}(A)|$，只需要验证如下映射

$$f\colon A \to \mathcal{P}(A),\ a \mapsto \{a\}$$

是单射即可（如何验证？）

下面我们来说明 $|A| \ne |\mathcal{P}(A)|$。假设 $|A| = |\mathcal{P}(A)|$，我们试图得出矛盾。

令 $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ 为一一映射。我们定义$B \in \mathcal{P}(A)$（换

言之，$B \subset A$）如下：

“对于任意的 $a \in A$，如果 $a \in f(a)$，则 $a \notin B$。如果 $a \notin f(a)$，则 $a \in B$。”

这样定义的 B，一定满足 $B \neq f(a) \forall a \in A$（为什么？）。由于 B 是 A 的子集，故 $B \in \mathcal{P}(A)$。由于 f 是满射，故存在 $c \in A$，使得 $B = f(c)$，这与 $B \neq f(a) \forall a \in A$ 矛盾。$\square$

自然数的基数、可数集、不可数集

定义：对于自然数集 $\mathbb{N}$，用 $\aleph_0$ (中文读做阿里夫零，英文读为aleph naught) 来代表 $|\mathbb{N}|$。

注： $\aleph$ 是希伯来文的首字母。

定义：对于自然数 $n \geq 1$，我们定义 $\mathcal{P}^n(\mathbb{N})$ 为 $\mathcal{P}(\mathcal{P}^{n-1}(\mathbb{N}))$。当 $n = 0$ 的时候，定义 $\mathcal{P}^0(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$。

注：根据定义，$\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{P}^{n+1}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathcal{P}^n(\mathbb{N})|}$。

注：根据Cantor基数定理，我们有

$$|\mathcal{P}^0(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}^1(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}^2(\mathbb{N})| < \cdots$$

自然数的基数、可数集、不可数集

定义： 我们说集合 A 是**可数**的，如果存在 A 和自然数集 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应。换言之，A 可数当且仅当 (if and only if) $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ 。

练习： 对于任意的正整数 k，$\mathbb{N}^k$是可数集。

练习： 设 A 和 B 都是可数集，证明 $A \cup B$ 仍然是可数集。（**提示：** Cantor-Bernstein定理。）

问题： 两个可数集的交集仍然是可数集吗？

自然数的基数、可数集、不可数集

定义： 我们说**无限集** A 是**不可数**的，如果不存在 A 和自然数集 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应。

例： 所有实数全体构成的集合 $\mathbb{R}$ 。可数集的幂集。

问题： 对于任何无限集 A ，如何证明 $|A| \geq \aleph_0$ ？(**提示：** 考虑无限集的定义，不停的使用类似希尔伯特旅馆中腾出房间的构造方式) 证明以后会给出。

问题： 对于任意无限集，从上面讨论中可知其基数大于等于 $\aleph_0$ 。我们也知道 $\aleph_0 < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$ 。是否存在无限集 A ，满足 $\aleph_0 < |A| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ ？

连续统假设 (continuum hypothesis, CH)

关于是否存在 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 之间基数的问题，是1900年希尔伯特在第二届国际数学家大会 (ICM) 的著名报告中提到的23个问题中的第一个。该问题首先由德国数学家康托(Cantor)提出。到1963年，Paul Cohen证明了连续统问题与现有的ZFC集合公理体系是相容的。即: 无论“不存在集合 A，使得 $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$”，还是“存在集合 A，使得 $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$”，都可以作为公理 (axiom) 被加到现有的ZFC集合公理体系中而不会引起矛盾。

从另外的角度讲，在ZFC集合公理体系中，“是否存在无限集 A 满足 $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$”是一个即不能证明为真，也不能证明为伪的命题。

连续统假设 (continuum hypothesis, CH)

如果我们在现有的ZFC集合公理体系上，选择“不存在集合 A，使得 $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$”，就称我们承认了连续统假设 (we assumed the continuum hypothesis, or in brief, CH)。

注：目前多数数学结果都是建立在ZFC上面的，如果用到了CH，一般会明确标明是基于ZFC + CH的。

注：如果我们更进一步假设，对于任意无限集 X，不存在集合 A，使得 $|X| < |A| < |\mathcal{P}(X)|$，则称我们承认了广义的连续统假设 (Generalized Continuum Hypothesis)。

连续统假设 (continuum hypothesis, CH)

定义： 对于任意自然数 $n \geq 1$，定义 $\aleph_n$ 为所有大于 $\aleph_{n-1}$ 的基数中的**最小基数**。

注： 为了使得上述定义是良性的（具体的说，为了上述定义中的最小基数存在，或者说，基数的序关系具有良序性），我们需要假定选择公理（或者其等价形式，比如佐恩引理或者良序化公理等）。

注： 如果我们承认广义连续统假设（assuming GCH），则对于任意自然数 n，$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$，并且 $\aleph_n = |\mathcal{P}^n(\mathbb{N})|$。

以空集作为定义域或者值域的映射是否存在

问题：对集合 A，是否存在映射 $f: \varnothing \to A$?

注：根据映射的定义（逐字逐句的对比定义），我们可以发现这样的映射是存在的（虽然定义域为空集）。当然，这是纯粹根据定义做逻辑验证。一个自然的问题就是，为什么要这样定义？也就是说，为什么映射的定义会允许以空集作为定义域？这里给出一个从某个角度的部分回答。问自己如下问题：1. 你愿意接受 $|\varnothing| \leq |A|$ 吗？ 2. 什么是一个集合的基数小于等于另外一个集合基数的定义？

以空集作为定义域或者值域的映射是否存在

问题： 对非空集合 A，是否存在映射 $f: A \to \varnothing$？

问题： 我们为什么在定义 $|A| \le |B|$ 时，用的是“存在从 A 到 B 的单射”，而不是“存在从 B 到 A 的满射”？

注： 在数学中，给出合理定义，很多时候并不像看起来那样容易的。

课堂练习

练习：如果集合 A 是可数集，证明 A 的任何无限子集必然也是可数集。

练习：如果集合 A 和 B 都是不可数集合，证明 $A \cup B$ 也是不可数集。（提示：可以利用前一个练习的结果。）

练习：如果集合 A 是不可数集，证明对于任何集合 B，$A \cup B$ 是不可数集。

课堂练习

练习： 如果集合 A 和 B 都是可数集，证明 $A \times B$ 也是可数集。

练习： 定义集合 A 为

$$\{(a_1, a_2, \ldots,): a_i = 0 \text{ 或者 } a_i = 1, \ \forall i\}$$

其中两个元素相等当且仅当它们的每个分量都相等。证明这样的集合 A 是不可数集合。

课堂练习

问题： 对于任意集合 A，$\emptyset \times A$ 是什么？

练习： 如果集合 $A \neq \emptyset$ 且 B 是不可数集，证明 $A \times B$ 也是不可数集。

课堂练习

练习： 对于映射 $f: A \to B$，$g, h: B \to A$，如果 $g \circ f = \mathrm{id}_A$ 且 $f \circ h = \mathrm{id}_B$，证明 $h = g$。(提示：先证明 f 为一一映射。)

练习： 构造映射 $f: A \to B$ 和 $g, h: B \to A$，满足 $g \circ f = h \circ f$，但是 $g \neq h$。

练习： 证明对于映射 $f: A \to B$ 和 $g, h: B \to A$，如果 f 为一一的且 $g \circ f = h \circ f$，则 $g = h$。

复习

练习：若集合 $A_1, A_2, \cdots$ 为一列可数集，证明 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可数集。

练习：设 $f: X \to Y$ 为从 X 到 Y 的映射，设 B 为 Y 的子集。证明 $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$ 。

练习：证明：若 A 是可数集，则 A 中所有元素可以写成一列 $x_1, x_2, \cdots$ 。换言之，如果 A 为可数集，则可以将 A 写为 $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ 。

复习

问题：任意一个无穷集 A，是否总是可以将 A 写为 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 的形式？ 比如，0 和 1 之间的所有实数全体，是否可以写成 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 的形式？

注：可数集也被称为**可列集**。这两种名称说的是一个意思（countable set）。

练习：假设集合 A **非空**，如果存在 A 到 B 的单射，证明一定存在从 B 到 A 的满射。

复习

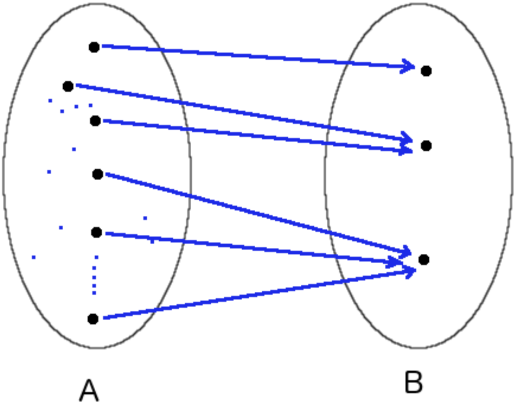
练习： 若映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 都是一一映射，证明 $g \circ f$ 作为 X 到 Y 的映射也是一一的，并且其逆映射满足 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

注： 一一映射的复合仍然是一一映射。

练习： 对于任意映射 $f: X \to X$，是否一定存在 $x \in X$，满足 $f(x) = x$？是否一定存在某个自然数 $n \geq 1$ 和某个 $y \in X$，满足 $f^n(y) = y$?

选择?

问题: 简单起见，假定集合 A 和 B 均非空。如果存在 A 到 B 的满射 f，是否一定存在从 B 到 A 的单射 g，满足 $f \circ g = \mathrm{id}_B$?



选择?

注：为了构造上面问题中所需要的映射 g，关键是对于任意的 $b \in B$，$g(b)$ 应该是 $f^{-1}(\{b\})$ 中的元素。换言之，我们需要 (也仅仅需要) $\forall b \in B$，$g(b) \in f^{-1}(\{b\})$。换言之，对于任意的 $b \in B$，我们要在 $f^{-1}(\{b\})$ 中选择一个来作为 $g(b)$。

问题：如果 B 为有限集，则可对 B 中的元素 b 逐个来进行 $g(b)$ 的选择。如果 B 为无限集，我们是否还可以理所当然的认为可以完成这样的选择呢？或者更简单的，如果 B 是基数最小的无限集 $\mathbb{N}$，是否可以理所当然的认为这样的选择存在？

选择?

问题： 定义符号函数 $\mathrm{sgn}: \mathbb{R} \to \{1, 0, -1\}$ 为

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1. & x < 0 \end{cases}$$

在这个定义中，我们是否有用到"选择"?

注： 没有。因为上面的映射规则是确定的，关于 $\mathrm{sgn}(x)$ 的取值，是没有歧义（选择）的。

选择公理（Axiom of Choice, AC）

选择公理 (Axiom of Choice)
设 C 为一个集合，其中每个元素都是一个非空集合，则我们可以从 C 中的每个元素 (一个非空集合) 中选择一个元素。换言之，存在

$$f: C \to \bigcup_{x \in C} x$$

满足 $f(c) \in c \ \forall c \in C$。

关于选择公理：选择公理引入之初，是一条很有争议的公理。它看起来如此明显，并且很多“自然“的结果也需要选择公理来支持。同时，基于选择公理，又可以

选择公理（Axiom of Choice, AC）

得出很多看起来难以想象，与直观完全相悖的结论（比如著名的Banach-Tarski悖论等等）。1963年，Cohen证明了选择公理是独立于ZF集合公理体系的。换言之，无论将选择公理还是将其否作为公理加入ZF公理体系中，都是不会有矛盾的。这样一个自然的问题就是，是否要将选择公理作为数学的基石？随着对选择公理（以及其等价形式，比如佐恩引理等）认识的深入，以及越来越多“基础”的结果（比如泛函分析中的Hahn-Banach定理等）的确需要选择公理，目前主流的数学是默认承认选择公理的。换言之，目前的主流数学，是构建于ZFC（ZF + AC）公理体系上的。

选择公理（Axiom of Choice, AC）

ZF ：Zermelo-Fraenkel集合公理体系
ZFC: ZF + AC

如果我们承认选择公理，那么我们可以得到:

1. Zorn's Lemma.

2. 三歧律（Trichotomy Law）： 对于任意两个集合 A 和 B，以下三种情况必有一种（且仅有一种）成立: i) $|A| < |B|$； ii) $|A| = |B|$； iii) $|A| > |B|$。

3. Banach-Tarski悖论: 一个半径为 1 的球可以通过拆分为有限部分并重组（刚体变换）的方式得到两个半径为 1 的球。

Futurama中的Banach-Tarski复制器

Farnsworth教授展示他的Banach-Tarski复制器

Banach-Tarski悖论

Banach-Tarski悖论

问题：下面论证错在何处?

断言：Banach-Tarski悖论是不可能成立的。

证明：半径为1的球，其体积为 $4\pi/3$ 。拆分成两部分 B_1 和 B_2 。则 B_1 的体积加上 B_2 的体积应该等于半径为 1 的球的体积，也就是 $4\pi/3$ 。B_1 通过刚体变换得到一个半径为 1 的球，从而 B_1 的体积为 $4\pi/3$ 。类似的，B_2 的体积也为 $4\pi/3$ 。故而

$$\frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3},$$

矛盾。□

选择?

注 1： 选择公理中的“选择”， 可以是从无限种可能中选择， 也可能是从有限种可能中选择 (比如两种可能中) 。

注 2： 如果前面选择公理定义中的集合 C 是包含有限个元素 (其中每个元素是非空集) ， 那么这样的选择总是存在的 (不需要额外假定选择公理) 。直观的说， 这是因为我们可以在“有限步“完成这样的选择。从数学上讲， 有限集合对应着从 1 到某个 n 的自然数。而根据数学归纳法， 只要我们可以进行“多一次选择”， 我们就一定可以进行“有限次”选择。 (数学归纳法不能得出可以做可数无穷多次选择！)

选择?

注 3： 和连续统假设（CH）不同，如果你的结论用到了选择公理（AC），你不需要单独指出使用了AC这个事实，因为目前主流数学的基石是ZFC，也就是ZF + AC。

注4: 在很多场合，佐恩引理（Zorn's Lemma，选择公理的等价形式之一）使用起来更为直接和方便。

选择?

问题：定义集合 $X_1 = \{1\}$，$X_2 = \{1,2\}$，$X_3 = \{1,2,3\}$，$\cdots$。在下面的叙述中，是否分别用到了选择公理？为什么？

1) 取 $x_1 \in X_1$。

2) 对于给定的自然数 n $(n \geq 1)$ 取 $x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2$，$\cdots$，$x_n \in X_n$。

3) 取 $x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2$，$\cdots$。

4) 在每个集合 X_k 中，取其中的最大元素 x_k，这样我们就得到 $x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2$，$\cdots$。

提示： 使用AC? 1 否； 2 否； 3 是； 4 否。

选择?

练习: 定义集合 A 为

$$\{(a_1, a_2, \ldots,): a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}, \ \forall i\}$$

其中两个元素相等当且仅当它们的每个分量都相等。证明这样的集合 A 是不可数集合。 (额外要求: 在证明中禁止使用选择公理)

问题: 在前面证明 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ 的过程中, 我们有没有用到选择公理? 如果用到, 是在那里?

复习、练习

练习：设集合 A、B 和 C 都是可数集合，且 $B \cap C = \varnothing$。证明 $|A| = |B \sqcup C|$。

练习：设集合 A、B 和 C 都是可数集合。证明 $|A| = |B \cup C|$。

练习：证明 $|(0,1)| = |(0,\infty)|$。

练习：证明 $|[0,1]| = |(0,\infty)|$。

复习、练习

练习：证明 $|[0,1]| = |[0,1] \sqcup [2,3]|$ 。

练习：在二维实平面中，设 A 为以 $(0,0)$ 为圆心，半径为 1 的圆盘（包含边界）。设 B 为以 $(5,0)$ 为圆心，半径为 1 的圆盘（包含边界）。证明 $|A| = |A \sqcup B|$ 。(对于更高维情况，比如 3 维，有类似结果吗？为什么？)

练习：设 $A = \{(m,x) : m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, x = \sqrt{2}m\}$，我们是否有 $|A| = \aleph_0$ ？为什么？。

复习、练习

练习：设集合 A 为不可数集，集合 B 是 A 的子集且 B 是可数集。证明 $A-B$ 是不可数集。

思考题：题设如上，证明 $|A-B|=|A|$ 。

提示：先证明对于可数集 C ，总是可以找到 C 中的子集 C_1 和 C_2 ，满足$C_1\cap C_2=\varnothing$ 、$C_1\sqcup C_2=C$ 且 $|C_1|=|C_2|=|C|$ 。

复习、练习（错在那里？）

问题：下面的论证有什么问题？

断言：实数轴上，线段 $[0,1]$ 和 $[0,2]$ 的长度是一样的。

证明：考虑从 $[0,1]$ 到 $[0,2]$ 的映射

$$f\colon [0,1] \longrightarrow [0,2],\ x \mapsto 2x。$$

容易验证 f 是单的且 f 是满的，从而 f 给出了 $[0,1]$ 到 $[0,2]$ 上的一一对应。将 $[0,1]$ 拆分成各个点的集合，换言之，

$$[0,1] = \bigsqcup_{0\le x\le 1} \{x\}。$$

复习、练习（错在那里？）

对于基于 f 诱导的从点集 $\{x\}$ 到点集 $\{2x\}$ 的对应，这是把点映射到另外一个点，故而是刚体变换。由于刚体变换不改变长度，对于每个点集 $\{x\}$ 到点集 $\{2x\}$ 的对应，长度是没变的。
注意到我们可以对 $[0,2]$ 做类似的拆分，

$$[0,2] = \bigsqcup_{0\le x\le 1} \{2x\}。$$

由于每个点集 $\{x\}$ 到点集 $\{2x\}$ 的对应是保持长度不变的，故而 f 也是保持长度不变的。从而我们可以得到$[0,1]$的长度等于$[0,2]$的长度。$\square$

复习、练习（选择公理）

问题：在前面Cantor基数定理（对于任意集合 A，$|A| < |\mathcal{P}(A)|$）的证明中，是否用到了选择公理？如果用到，分别用在哪里？

问题：设Y为非空集合，定义 $Y^{\mathbb{N}}$ 为所有 $\mathbb{N}$ 到 Y 的映射全体构成的集合（更一般的，对于所有 X 到 Y 的映射全体构成的集合，我们也有记号 Y^X）。首先证明 $Y^{\mathbb{N}}$ 为非空集合，然后说明在你的证明中是否用到了选择公理。

复习、练习（选择公理）

问题： 对于一列非空集合$X_1, X_2, \cdots$，定义

$$X_1 \times X_2 \times \cdots = \{(x_1, x_2, \cdots) : x_k \in X_k \, \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}。$$

1. 证明上面定义的集合非空。
2. 你的证明中，是否用到选择公理。

注： 从某种意义上说，选择公理几乎无处不在。

注： 前面定义的从$\mathbb{N}$到Y的映射全体构成的集合，也可以看作如下集合（为什么？）

$$Y \times Y \times \cdots = \{(y_1, y_2, \cdots) : y_k \in Y, \ \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}。$$

复习、练习（康托集相关）

问题 [康托集 (The Cantor Set)]: 在区间 $[0,1]$ 中，去掉正中间的 $1/3$ 开区间 $(1/3,2/3)$，我们得到两个不相交的的闭区间 $[0,1/3]$ 和 $[2/3,1]$。对于这两个闭区间，再分别去掉它们正中间的 $1/3$ 开区间，我们得到四个互不相交的闭区间。如此这样一直下去，最终剩下的集合被称为康托集。

问题一: 康托集是否为空集？为什么？

问题二: 在上面的构造中，为得到康托集，我们去掉的开区间是有限多个还是无限多个？如果是无限多个，那么是可数无穷多个还是不可数无穷多个？为什么？

习题解答

练习： 若 $A_1, A_2, \cdots$ 都是可数集，证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 仍然是可数集。

证明： 我们试图使用Cantor-Bernstein定理来证明 $|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n| = \aleph_0$ 。

由于 A_1 是可数集且 $A_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ，我们有

$$\aleph_0 = |A_1| \leq |\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n| \text{ 。}$$

下面我们来证明 $|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n| \leq \aleph_0$ 。

习题解答

断言：如果非空集合 A 到非空集合 B 的满射，则存在 B 到 A 的单射。

关于该断言的正确性，可以参看课件中选择公理引入部分的内容。简单的说，基于选择公理，如果存在 A 到 B 的满射，我们可以构造出 B 到 A 的单射。

在集合 $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 中，对于所有 $k \geq 1$，我们构造其子集 $B_k = \{(k, x) : x \in A_k\}$。
根据定义，显然这些 B_k 是两两互不相交的，并且每个 B_k 都是可数集（为什么？）。考虑它们的无交并 $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$ 到 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的映射

习题解答

$$f: \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,,\quad (n,x) \mapsto x\ 。$$

则 f 为满射（为什么？）。根据上面的断言，存在从 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 到 $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$ 的单射，故而

$$|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n| \leq |\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k|。$$

根据前面的练习，我们有 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$，从而 $|\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k| = \aleph_0$ 。

至此，我们有

习题解答

$$\aleph_0 = |A_1| \le |\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n| \le |\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k| = \aleph_0 \quad ,$$

根据Cantor-Bernstein定理，$|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n| = \aleph_0$ 。 □

问题：如果集合 $A_1, A_2, \cdots$ 都是非空有限集，是否可以断定 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 一定是可数集？ 如果集合 $A_1, A_2, \cdots$ 都是非空有限集且两两互不相交，是否可以断定 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 一定是可数集？如果集合 $A_1, A_2, \cdots$ 都是非空有限集且任意集合 A_k 满足 $|A_k| \ge k$ ，是否可以断定 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 一定是可数集？你的证明可以完全绕开选择公理吗？

习题解答

练习： 若集合 A 是可数集，则我们可以将 A 写为 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 。换言之，A 中的元素可以写成一列（A 是可列的）。

证明： 对于可数集 A ，我们需要找到一种方式，使得每个元素可以一一的写成 a 下标某个正整数的形式。

由于 A 是可数集，故存在 A 和 $\mathbb{N}$ 的一一对应。由于 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}_{\geq 1}$ 之间有自然的一一对应。不妨设 $f\colon A \longrightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ 为一一映射。

对于任意 $x \in A$ ，我们将其记为 $a_{f(x)}$ 。

习题解答

我们需要证明上面的记法是良性定义的 (well defined) 。换言之，我们需要

“如果 $x \neq y$，则 $f(x) \neq f(y)$ 。”

由于 f 为单，上述要求是满足的。

同时，为了说明这样写下的集合 A 的下标没有空隙（比如 $\{a_1, a_5, a_6, \cdots\}$），我们需要 f 是满的。由于 f 为一一，故而 f 为满。

证毕。$\square$

习题解答

练习： 若集合 A 是无限集，$\aleph_0 \leq |A|$。换言之，自然数集/可数集是“最小”的无限集。

证明： 因为 A 是无限集，根据无限集的定义，存在 A 到其真子集 A_1 的一一映射，不妨记为

$$f: A \longrightarrow A_1 \text{ 。}$$

由于 $A_1 \subsetneq A$，存在 $x \in A - A_1$。

断言： $f(A_1) \subsetneq A_1$ 且 $f(x) \in A_1 - f(A_1)$。

事实上，由于 f 将 A 映到 A_1，我们显然有 $f(A_1) \subset f(A) = A_1$。对于上述的 $x \in A - A_1$，因为

习题解答

$x \in A$，我们有 $f(x) \in f(A) = A_1$ 。因为 $x \notin A_1$ 且 f 为单射，我们有 $f(x) \notin f(A_1)$ （若 $f(x) \in f(A_1)$，则存在 $y \in A_1$ ，使得 $f(x) = f(y)$ 。由于 $x \notin A_1$ ，我们有 $x \neq y$ 。但是 $f(x) = f(y)$ 与 f 为单射矛盾）。故 $f(x) \in A_1 - f(A_1)$，从而 $f(A_1) \subsetneq A_1$ 。

若我们将 $f(A_1)$ 记为 A_2 ，$f(A_2)$ 记为 A_3，$\cdots$，类似的，我们可以得到

$$A_{k+1} \subsetneq A_k \text{ 且 } f^k(x) \in A_k - A_{k+1} \text{ 。}$$

试证明之。

习题解答

断言：如果 $k \neq j$，则 $f^k(x) \neq f^j(x)$。
断言证明：该断言比较容易证明，可以作为练习。

断言：存在从 $\mathbb{N}$ 到 A 的单射。
断言证明：练习。

由于存在 $\mathbb{N}$ 到 A 的单射，故 $\aleph_0 \leq |A|$。 $\square$

问题：上述证明中，是否用到了选择公理？

代数数的基数

定义： 对于 $x \in \mathbb{R}$，我们说 x 是（实）代数数，如果 x 是某个代数方程 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ 的（实）根，其中 a_0，$\cdots$，a_n 都是整数。

注： 在上面代数数的定义中，如果将“a_0，$\cdots$，a_n 都是整数”这个要求改为“a_0，$\cdots$，a_n 都是有理数”，得到的定义是完全一样的。为什么？

练习： 写出可数多个互不相等的（实）代数数（需证明为什么是代数数）。换言之，证明（实）代数数全体的基数大于等于 $\aleph_0$。

代数数的基数

练习： 假定已知如下事实：一个次数为 n 的代数方程最多有 n 个实根。试证明全体（实）代数数的基数为 $\aleph_0$。

提示： 设

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}: x\text{是某个}n\text{次整数系数代数方程的根}\}。$$

证明对于所有的 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，我们有 $|A_n| = \aleph_0$。

注： 基于如下形式的代数基本定理“任何 n 次复代数方程有在复数域里面有 n 个根（重根计算重数）”，可以用类似方法证明复代数数全体的集合也是可数集。